

**Rozšíření MA1 pro biochemiky .
Trojný integrál.**

Vypočítejte integrály:

1. $\iiint_D (x + y + z) dx dy dz$, kde $D = \{[x, y, z]; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$;
2. $\iiint_D x dx dy dz$, kde oblast D je ohraničená rovinami $x=0$, $y=0$, $z=0$ a $x+y+z=1$;
3. $\iiint_D y dx dy dz$, kde $D = \{[x, y, z]; 0 \leq x, 0 \leq y, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$;
4. $\iiint_D z^2 dx dy dz$, kde oblast D je ohraničená
a) rovinou $z=0$ a plochou $z=9-x^2-y^2$; b) plochou $z=x^2+y^2$ a rovinou $z=4$.
(válcové souřadnice)
5. $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, kde $D = \{[x, y, z]; 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$ (sférické souřadnice).

Aplikace trojného integrálu:

Trojným integrálem vypočítejte objem tělesa, ohraničeného

1. rovinami $x=0, y=0, z=0, x=4, y=4$ a plochou $z=x^2+y^2+1$;
2. rovinami $z=0, x+y+z=2$ a plochou $y=x^2$;
3. plochami $y=x^2, y=4, z=x^2+y^2$ a $z=5$.
4. rovinami $z=0, y=0, x+y+z=2$ a plochou $y=x^2$;
5. rovinou $z=0$ a plochami $z=4-y^2$ a $y=\frac{x^2}{2}$;
6. rovinami $x=0, y=1, x+y=3, z=0$ a plochou $z=xy$;
7. plochami $z=x^2+y^2$ a $x^2+y^2+z^2=6$.

„Fyzikální“ aplikace:

1. Vypočítejte hmotnost tělesa, ohraničeného rovinou $z=0$ a plochami $x^2+y^2=1, z=x^2+y^2+1$,
je-li hustota h tělesa v bodě (x, y, z) přímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od osy z .
2. Vypočítejte hmotnost tělesa, ohraničeného rovinou $z=4$ a plochou $z=x^2+y^2$, je-li hustota h tělesa
v bodě (x, y, z) rovna a) $0 h(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$, b) $h(x, y, z) = z$.
3. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního válce vzhledem k jeho ose .
4. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního tělesa, ohraničeného rovinou $z=3$ a plochou $z=\sqrt{x^2+y^2}$
vzhledem k ose z .